12 Théorème de GAUSS-LUCAS

Définition 12.0.1

Si $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$, on dit que $\mathcal{C}$ est convexe si

$$\forall (a,b) \in \mathcal{C}^2,\ \forall t \in [0,1],\ ta + (1-t)b \in \mathcal{C}.$$

Proposition 12.0.2

Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme on note $Z(P) = \{z \in \mathbb{C} \mid P(z) = 0\}$ l'ensemble des racines de P.

Définition 12.0.3

Si $\Lambda \subset \mathbb{C}$ on note $\mathrm{Conv}(\Lambda)$ l'enveloppe convexe de Λ. Pour rappel

$$\mathrm{Conv}(\Lambda) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists r \in \mathbb{N}^*,\ \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \Lambda^r,\ \exists (t_1, \ldots, t_r) \in (\mathbb{R}^+)^r,\ \sum_{i=1}^{r} t_i = 1 \text{ et } \lambda = \sum_{i=1}^{r} t_i \lambda_i\}.$$

Remarque 12.0.4

L'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(\Lambda)$ est le plus petit convexe (pour la relation d'inclusion) qui contient Λ.

Théorème 12.0.5: Théorème de GAUSS-LUCAS

Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme non constant alors

$$Z(P') \subset \mathrm{Conv}(Z(P)).$$

Démonstration. Le corps $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos et P non constant, il existe $r \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r$ et $(n_1, \ldots, n_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ tels que $P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{n_i}$. En particulier, $Z(P) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. La décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ est alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{X - \lambda_i}.\ (\heartsuit)$$

Soit $z \in Z(P')$. Si $z \in Z(P') \cap Z(P)$ alors $z \in Z(P) \subset \mathrm{Conv}(Z(P))$. Si $z \in Z(P') \cap Z(P)^c$ on a

$$0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{z - \lambda_i} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i \overline{(z - \lambda_i)}}{|z - \lambda_i|^2}$$

ainsi

$$0 = \bar{0} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i (z - \lambda_i)}{|z - \lambda_i|^2}.\ (\spadesuit)$$

En isolant z dans (♠) et en notant pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $t_i = \dfrac{n_i|z-\lambda_i|^{-2}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{r} n_i|z-\lambda_i|^{-2}}$ alors $t_i \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} t_i = 1$ et

$$z = \sum_{i=1}^{r} t_i\lambda_i \in \mathrm{Conv}(Z(P)).$$

Dans les deux cas $z \in \mathrm{Conv}(Z(P))$ ce qui achève la démonstration. □

Lemme 12.0.6

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Il existe $Z_{\min} \subset Z(P)$ minimal (pour la relation d'inclusion parmi les parties de $Z(P)$ qui conservent l'enveloppe convexe totale) telle que

$$\mathrm{Conv}(Z_{\min}) = \mathrm{Conv}(Z(P))$$

et $\mathrm{Conv}(Z(P)) \setminus Z_{\min}$ reste convexe.

Démonstration. On pose $r = |Z(P)| \in \mathbb{N}^*$ et on note $Z(P) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. On considère alors

$$\mathcal{I} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists J \subset [\![1,r]\!],\ |J| = n \text{ et } \mathrm{Conv}(\{\lambda_j \mid j \in J\}) = \mathrm{Conv}(Z(P))\}.$$

L'ensemble d'entiers $\mathcal{I}$ contient r, il est en particulier non vide. On note $i = \min(\mathcal{I})$ et $I \subset [\![1,r]\!]$ une partie de $[\![1,r]\!]$ qui réalise ce minimum, c'est à dire telle que $|I| = i$ et $\mathrm{Conv}(\{\lambda_j \mid j \in I\}) = \mathrm{Conv}(Z(P))$. Montrons que $Z_{\min} = \{\lambda_j \mid j \in I\}$ est un élément minimal (pour la relation d'inclusion parmi les parties de $Z(P)$ qui conserve l'enveloppe convexe totale). Soit $\mathcal{U} \subset Z(P)$ telle que $\mathrm{Conv}(\mathcal{U}) = \mathrm{Conv}(Z(P))$ et $\mathcal{U} \subset Z_{\min}$. On a alors $|\mathcal{U}| \in \mathcal{I}$ donc par minimalité de i on a $i = |Z_{\min}| \leq |\mathcal{U}|$ mais $\mathcal{U} \subset Z_{\min}$ donc nécessairement $\mathcal{U} = Z_{\min}$. Montrons maintenant que $\mathrm{Conv}(Z(P)) \setminus Z_{\min}$ est convexe. On note $\mathcal{V} = \mathrm{Conv}(Z(P)) \setminus Z_{\min}$. Soit $(a,b) \in \mathcal{V}^2$ et $t \in [0,1]$. Par convexité de $\mathrm{Conv}(Z(P))$ on a $ta + (1-t)b \in \mathrm{Conv}(Z(P))$, il ne reste plus qu'à montrer que $ta + (1-t)b \notin Z_{\min}$ pour conclure que $ta + (1-t)b \in \mathcal{V}$. On peut supposer $t \in]0,1[$. On raisonne par l'absurde, soit $k \in I$ tel que $ta + (1-t)b = \lambda_k \in Z_{\min}$. Soit $(x_j)_{j\in I}$ et $(y_j)_{j\in I}$ des coefficients positifs tels que

$$a = \sum_{j\in I} x_j\lambda_j \text{ et } b = \sum_{j\in I} y_j\lambda_j$$

et $\displaystyle\sum_{j\in I} x_j = \sum_{j\in I} y_j = 1$. Ainsi

$$\lambda_k = \sum_{j\in I}(tx_j + (1-t)y_j)\lambda_j$$

donc si on pose pour tout $j \in I$, $z_j = tx_j + (1-t)y_j$ on a $\displaystyle\sum_{j\in I} z_j = 1$ et

$$\lambda_k = \sum_{j\in I} z_j\lambda_j.$$

Si $z_k < 1$ on alors

$$\lambda_k(1 - z_k) = \sum_{j\in I\setminus\{k\}} z_j\lambda_j$$

donc

$$\lambda_k = \sum_{j\in I\setminus\{k\}} \left(\frac{z_j}{1-z_k}\right)\lambda_j.$$

Donc $\lambda_k \in \mathrm{Conv}(Z_{\min} \setminus \{\lambda_k\})$ mais alors $\mathrm{Conv}(Z_{\min} \setminus \{\lambda_k\}) = \mathrm{Conv}(Z_{\min})$ ce qui contredit la minimalité de $Z_{\min}$ donc nécessairement $z_k = 1$ et pour tout $j \in I\setminus\{k\}$, $z_j = 0$ donc pour tout $j \in I\setminus\{k\}$, $tx_j = (1-t)y_j = 0$ donc $a = b = \lambda_k \in Z_{\min}$ ce qui est une contradiction car $a \in \mathcal{V}$. Ainsi $ta+(1-t)b \notin Z_{\min}$ donc $\mathcal{V}$ est convexe. □

Corollaire 12.0.7

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Si P'' divise P et $|Z(P)| \geq 2$ alors les racines de P sont alignées.

Démonstration. Commençons par montrer que les racines de P sont toutes simples. On pose $n = \deg(P)$. Comme P'' divise P il existe Q unitaire et de degré 2 tel que

$$n(n-1)P = QP''.$$

En dérivant à nouveau l'équation ($\heartsuit$) de la démonstration du théorème de GAUSS-LUCAS on obtient

$$\left(\frac{P'}{P}\right)' = \frac{P''P - (P')^2}{P^2} = -\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{(X-\lambda_i)^2}$$

ainsi

$$\frac{n(n-1)}{Q} - \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{X-\lambda_i}\right)^2 = -\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{(X-\lambda_i)^2}. \ (\diamondsuit)$$

Soit $j \in [\![1, r]\!]$ et $z_j \in Z(P)$, deux cas peuvent alors se présenter :

— si z_j est une racine double alors $Q = (X - z_j)^2$ ainsi en multipliant ($\diamondsuit$) par $(X - z_j)^2$ et en évaluant en $X = z_j$ on obtient

$$n(n-1) - n_j^2 = -n_j \Longleftrightarrow n(n-1) = n_j(n_j - 1)$$

or par hypothèse P possède au moins deux racines distinctes donc $n_j < n$ et l'égalité précédente est donc une contradiction ainsi ce cas n'est pas possible.

— si z_j n'est pas racine double de Q comme précédemment en multipliant ($\diamondsuit$) par $(X - z_j)^2$ et en évaluant en $X = z_j$ on obtient

$$-n_j^2 = -n_j \Longleftrightarrow n_j(n_j - 1) = 0$$

or $n_j \neq 0$ donc $n_j = 1$.

Ainsi toutes les racines de P sont simples. On conclut à présent, on considère $Z_{\min} \subset Z(P)$ qui vérifie les hypothèses du lemme précédent. Les racines de P étant simples on a $Z(P) \cap Z(P') = \emptyset$ en particulier $Z_{\min} \cap Z(P') = \emptyset$ donc d'après le théorème de GAUSS-LUCAS

$$Z(P'') \subset \mathrm{Conv}(Z(P'')) \subset \mathrm{Conv}(Z(P')) \subset \mathrm{Conv}(Z(P)) \setminus Z_{\min}$$

donc $Z(P'') \cap Z_{\min} = \emptyset$ comme P'' divise P on sait également que $Z(P'') \subset Z(P)$ et comme toutes les racines de P sont simples il en est de même pour P'' par conséquent $|Z(P'')| = n - 2$ donc $|Z_{\min}| \leq n - (n-2) = 2$ mais comme $|Z(P)| \geq 2$ on a $|Z_{\min}| = 2$ ainsi l'enveloppe convexe des racines de P est engendrée par 2 éléments il s'agit donc d'un segment, en particulier toutes les racines de P sont alignées. □

Proposition 12.0.8

L'entier 7 vérifie

$$7 = \max\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\} \mid Z((X+1)^n - X^n - 1) \cap \mathbb{C}^* \subset \mathbb{U}\}.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$ on note $P_n = (X+1)^n - X^n - 1$. On a $P_n' = n(X+1)^{n-1} - nX^{n-1} = n((X+1)^{n-1} - X^{n-1})$. Déterminons $Z(P_n')$. On a $\deg(P_n') = n - 2$. Soit $z \in Z(P_n')$. On a

$$(z+1)^{n-1} = z^{n-1} \ (*)$$

or $z \neq 0$ car $P_n'(0) = n$. Donc on peut diviser $(*)$ par z. On obtient

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^{n-1} = 1.$$

Donc il existe $k \in [\![0, n-2]\!]$ tel que

$$\frac{z+1}{z} = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n-1}\right)$$

mais $z + 1 \neq z$ donc nécessairement $k \in [\![1, n-2]\!]$. Il s'ensuit que

$$z = \frac{1}{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n-1}\right) - 1} = \frac{\exp\left(\frac{-ik\pi}{n-1}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n-1}\right)}.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$ on a

$$Z(P_n') = \left\{ z_k := \frac{\exp\left(\frac{-ik\pi}{n-1}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n-1}\right)} \mid k \in [\![1, n-2]\!] \right\}.$$

Si P_n vérifie $Z(P_n) \cap \mathbb{C}^* \subset \mathbb{U}$, alors par le théorème de GAUSS-LUCAS on a

$$Z(P_n') \subset \mathrm{Conv}(Z(P_n)) \subset \mathrm{Conv}(\mathbb{U}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}.$$

Or on a

$$|z_1| = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right)}$$

mais pour $n \geq 8$, on a

$$2\sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right) < 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$$

et donc $|z_1| > 1$. Ainsi, $\max\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\} \mid Z((X+1)^n - X^n - 1) \cap \mathbb{C}^* \subset \mathbb{U}\} \leq 7$.
Montrons que $Z(P_7) \cap \mathbb{C}^* \subset \mathbb{U}$. On a $\deg(P_7) = 6$. Examinons $P_7 = (X+1)^7 - X^7 - 1$ et $P_7' = 7((X+1)^6 - X^6)$. On voit que 0 et -1 sont racines de P_7, j est racine de P_7 et de P_7', ensuite j^2 est racine de P_7 et de P_7' donc au final

$$P_7 = X(X-1)(X-j)^2(X-j^2)^2.$$

Donc $7 = \max\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\} \mid Z((X+1)^n - X^n - 1) \cap \mathbb{C}^* \subset \mathbb{U}\}$. □

Corollaire 12.0.9

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et Δ une droite du plan complexe, H_1 et H_2 les deux demi-plans ouverts limités par Δ. Si P' a une racine dans H_1, alors $P(H_1) = \mathbb{C}$.

Démonstration. Supposons $P(H_1) \neq \mathbb{C}$. Considérons $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \notin P(H_1)$. Les racines du polynôme $P - z$ appartiennent donc à $\mathbb{C} \setminus H_1 = \overline{H_2}$. Comme $\overline{H_2}$ est convexe, le théorème de GAUSS-LUCAS assure que les racines de P' sont dans $\overline{H_2}$. Cela contredit l'existence d'une racine P' dans H_1. □

Théorème 12.0.10: Théorème de ROLLE

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a,b[$ si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Corollaire 12.0.11

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant. Si toutes les racines de P sont simples alors

$$Z(P') \subset]\min(Z(P)), \max(Z(P))[.$$

Démonstration. On pose $n = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$. Si $n = 1$ alors $Z(P') = \emptyset$ et la conclusion est automatique. Sinon on note $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ les n racines distinctes de P ordonnées. Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ le polynôme P est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$ dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$ et vérifie $P(x_i) = P(x_{i+1}) = 0$ le théorème de ROLLE assure alors l'existence de $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P'(y_i) = 0$. Comme P' a au plus $n-1$ racines on a nécessairement $Z(P') = \{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ et par ce qui précède

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < y_n < x_n.$$

□

Remarque 12.0.12: Ellipse de STEINER

Soit A, B et C trois points du plan complexe d'affixe respectif z_A, z_B et z_C alors il existe une unique ellipse tritangente aux milieux des côtés du triangle ABC appelée ellipse de Steiner. De plus, les foyers de l'ellipse de Steiner sont les racines de P' avec

$$P = (X - z_A)(X - z_B)(X - z_C).$$

C'est le théorème de MARDEN.

Proposition 12.0.13

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Les racines de P et celles de P' partagent le même barycentre (les poids sont les multiplicités des racines).

Démonstration. On peut supposer P unitaire sans perte de généralité. On écrit $P = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.

Le barycentre des racines de P est $b = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{n} = \frac{-a_{n-1}}{n}$. De même, on écrit $P' = n \prod_{i=1}^{n-1}(X - \lambda_i') = \sum_{i=0}^{n-1} a_i' X^i$. Le barycentre des racines de P' est

$$b' = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i'}{n-1} = \frac{-a_{n-2}'}{(n-1)n} = \frac{-(n-1)a_{n-1}}{(n-1)n} = b.$$

□

Corollaire 12.0.14

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant de degré $n \geq 1$. L'unique racine de $P^{(n-1)}$ est le barycentre des racines de P.